Exámenes de Selectividad

Matemáticas. Andalucía 2024, Ordinaria

mentoor.es

Ejercicio 1. Análisis

Sea la función $\mathbf{f} : (\mathbf{0}, +\infty) \to \mathbb{R}$ definida por $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \ln(\mathbf{x})$, donde $\ln$ denota la función logaritmo neperiano, y los puntos de su gráfica $\mathbf{A}(\mathbf{1}, \mathbf{0})$ y $\mathbf{B}(\mathbf{e}, \mathbf{1})$.

a) **Determina, si existen, los puntos de la gráfica de f en los que la recta tangente a la gráfica es paralela a la recta que pasa por los puntos A y B.**

b) **Determina la ecuación de la recta normal a la gráfica de f en el punto A.**

Solución:

a) **Determina, si existen, los puntos de la gráfica de f en los que la recta tangente a la gráfica es paralela a la recta que pasa por los puntos A y B.**

Por resolver el apartado (a), debemos calcular en primer lugar la pendiente de la recta que une $A(1, 0)$ y $B(e, 1)$. Esta viene dada por

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1-0}{e-1} = \frac{1}{e-1}.$$

La derivada de $f(x) = \ln(x)$ es $f'(x) = \frac{1}{x}$. Para que la tangente a la curva sea paralela a la recta anterior, la pendiente de la tangente debe coincidir con $\frac{1}{e-1}$. Por tanto, se requiere

$$f'(x) = m \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{x} = \frac{1}{e-1} \quad \Rightarrow \quad x = e-1,$$

de donde se deduce $x = e - 1$. El punto correspondiente en la gráfica es

$$\left.\begin{array}{l} x = e-1, \\ y = f(x) = f(e-1) = \ln(e-1) \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad P(\, e-1,\ \ln(e-1)\,).$$

Por lo tanto, el único punto donde la recta tangente es paralela a la que une A y B es

$$\boxed{P\big(e-1,\ \ln(e-1)\big)}$$

b) **Determina la ecuación de la recta normal a la gráfica de f en el punto A.**

En el apartado (b), se busca la ecuación de la recta normal a la gráfica en $A(1, 0)$. La pendiente de la tangente en ese punto se obtiene evaluando

$$m_{\text{tg}} = f'(1) = 1.$$

La recta normal tiene por pendiente la negativa de la inversa de la pendiente de la tangente, es decir,

$$m_{\text{n}} = \frac{-1}{m_{\text{tg}}} = \frac{-1}{1} = -1.$$

Usando la forma punto-pendiente para la recta que pasa por $A(1, 0)$ con pendiente -1, se tiene

$$y - y_0 = m \cdot (x - x_0) \quad \Rightarrow \quad y - 0 = -1\,\big(x-1\big) \quad \Longrightarrow \quad y = -x + 1.$$

Por lo tanto, la ecuación de la normal en A es:

$$\boxed{y = -x + 1}$$

Ejercicio 2. Análisis

Considera la función continua f definida por

$$\mathbf{f(x)} = \begin{cases} \frac{x\cos(x) - a\sin(x)}{x^3} & \text{si } x < 0, \\ b\cos(x) - 1 & \text{si } x \geq 0. \end{cases}$$

Calcula a y b.

Solución:

Vemos que cada una de las ramas que conforman la función f son continuas (funciones trigonométricas y cociente cuyo denominador no se anula en su intervalo de definición). La continuidad de f en $x = 0$ exige que el valor de la función al aproximarnos por la izquierda coincida con el valor de la función al evaluar en en el mismo punto por la derecha. Para la parte izquierda, se considera el límite

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0} \frac{x\cos(x)\ -\ a\ \sin(x)}{x^3} = \frac{0}{0} \text{ Indeterminación.}$$

Utilizamos la Regla de L'Hôpital:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\cos(x) - x\sin(x) - a\ \cos(x)}{3x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{(1-a)\cos(x) - x\sin(x)}{3x^2} = \frac{1-a}{0} \text{ Indeterminación.}$$

Para evitar tener una discontinuidad de salto infinito, que vendría dada por una indeterminación de la forma $\frac{k}{0}$, con $k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, se requiere imponer la condición

$$1 - a = 0 \quad \Rightarrow \quad a = 1.$$

Una vez que $a = 1$, el límite adopta un valor finito y resulta ser:

$$\lim_{x \to 0} \frac{-x\sin(x)}{3x^2} = -\lim_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{3x} = \frac{0}{0} \text{ Indeterminación} \quad \Rightarrow \quad -\lim_{x \to 0} \frac{\cos(x)}{3} = -\frac{1}{3}.$$

En consecuencia, el valor al que tiende la función para $x \geq 0$ en el punto $x = 0$ debe igualar $-\frac{1}{3}$:

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0} b\cos(x) - 1 = b - 1.$$

Para que una función sea continua en un punto es necesario que los límites laterales coincidan:

$$b - 1 = -\frac{1}{3} \quad \Rightarrow \quad b = \frac{2}{3}.$$

Sabemos que

$$f(x) \text{ es continua en } x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{x \to 0} f(x) = f(0).$$

En nuestro caso:

$$\left. \begin{aligned} f(0) = \frac{2}{3}\cos(0) - 1 = -\frac{1}{3} \\ \lim_{x \to 0} f(x) = -\frac{1}{3} \end{aligned} \right\} \quad \Rightarrow \quad f(x) \text{ es continua en } x = 0.$$

Por lo tanto, si $\mathbf{a = 1}$ y $\mathbf{b = \frac{2}{3}}$, entonces $\mathbf{f(x)}$ es continua $\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}$.

Ejercicio 3. Análisis

Considera la función f definida por $\mathbf{f(x) = \frac{x^3+2}{x^2-1}}$, para $\mathbf{x \neq -1, x \neq 1}$. Calcula una primitiva de f cuya gráfica pase por el punto $\mathbf{(0,1)}$.

Solución:

La expresión $\frac{x^3+2}{x^2-1}$ puede descomponerse en una suma de un término polinómico y una parte fraccionaria. Al realizar la división entre polinomios, se obtiene

$$\frac{x^3+2}{x^2-1} = x + \frac{x+2}{x^2-1}.$$

Lo anterior también se puede concluir dándonos cuenta de que

$$x^3+2 = x^3 - x + x + 2 = x(x^2-1) + x + 2 \quad \Rightarrow \quad \frac{x^3+2}{x^2-1} = \frac{x(x^2-1)+x+2}{x^2-1} = x + \frac{x+2}{x^2-1}.$$

En esta última fracción, se factoriza $x^2-1 = (x-1)(x+1)$ y se descompone en fracciones más simples como

$$\frac{x+2}{(x-1)(x+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} = \frac{x(A+B)+(A-B)}{(x-1)(x+1)}.$$

La comparación de numeradores lleva a

$$\begin{cases} A+B=1, \\ A-B=2. \end{cases}$$

De este sistema se deduce que $A = \frac{3}{2}$ y $B = -\frac{1}{2}$. De este modo,

$$\frac{x+2}{x^2-1} = \frac{3}{2}\,\frac{1}{x-1} - \frac{1}{2}\,\frac{1}{x+1}.$$

La función original se escribe como

$$f(x) = x + \frac{3}{2}\,\frac{1}{x-1} - \frac{1}{2}\,\frac{1}{x+1}.$$

Una primitiva de f se calcula integrando cada término:

$$\int f(x)\,dx = \int \left(x + \frac{3}{2}\,\frac{1}{x-1} - \frac{1}{2}\,\frac{1}{x+1} \right) dx = \frac{x^2}{2} + \frac{3}{2}\ln|x-1| - \frac{1}{2}\ln|x+1| + C.$$

Para determinar C, se emplea la condición de que la gráfica de la primitiva pase por el punto $(0,1)$. Se evalúa la expresión en $x=0$:

$$\frac{0^2}{2} + \frac{3}{2}\ln|0-1| - \frac{1}{2}\ln|0+1| + C = 1.$$

Dado que $\ln|-1| = \ln(1) = 0$, la parte variable es 0, por lo que $C = 1$. De este modo, la primitiva solicitada es

$$F(x) = \frac{x^2}{2} + \frac{3}{2}\ln|x-1| - \frac{1}{2}\ln|x+1| + 1.$$

Por lo tanto, una función cuya derivada es $\mathbf{f(x)}$ y que cumple la condición de pasar por $\mathbf{(0,1)}$ viene dada por

$$\boxed{F(x) = \frac{x^2}{2} + \frac{3}{2}\ln|x-1| - \frac{1}{2}\ln|x+1| + 1}$$

Ejercicio 4. Análisis

Halla la función $\mathbf{f}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ tal que $\mathbf{f''(x)=x\cos(x)}$ y cuya gráfica pasa por los puntos $\left(\mathbf{0},\frac{\pi}{\mathbf{2}}\right)$ y $(\pi,\mathbf{2}\pi)$.

Solución:

Se integra dos veces la segunda derivada $f''(x)=x\cos(x)$. En primer lugar, se obtiene la primera derivada:

$$f'(x)=\int x\cos(x)\,dx.$$

Usamos integración por partes con

$$\begin{cases} u=x \quad \Rightarrow \quad du=dx,\\ dv=\cos(x) \quad \Rightarrow \quad v=\sin(x).\end{cases}$$

El resultado de esta integral es

$$f'(x)=\int x\cos(x)\,dx=\int u\,dv=uv-\int v\,du=x\sin(x)-\int\sin(x)\,dx=x\sin(x)+\cos(x)+C_1.$$

Para hallar la función $f(x)$ se integra de nuevo:

$$f(x)=\int\left[x\sin(x)+\cos(x)+C_1\right]dx=\int x\sin(x)\,dx+\int\cos(x)\,dx+\int C_1\,dx.$$

La primera parte, $\int x\sin(x)\,dx$, se evalúa mediante integración por partes:

$$\begin{cases} u=x \quad \Rightarrow \quad du=dx,\\ dv=\sin(x) \quad \Rightarrow \quad v=-\cos(x).\end{cases}$$

El resultado de esta primera integral es

$$\int x\sin(x)\,dx=\int u\,dv=uv-\int v\,du=-x\cos(x)-\int-\cos(x)\,dx=x-x\cos(x)+\sin(x).$$

Al sumar todo, se llega a

$$f(x)=\left[-x\cos(x)+\sin(x)\right]+\sin(x)+C_1x+C_2,$$

que se simplifica como

$$f(x)=-x\cos(x)+2\sin(x)+C_1x+C_2.$$

Para determinar las constantes C_1 y C_2, se imponen las condiciones sobre la gráfica de f. Se requiere que

$$f(0)=\frac{\pi}{2},\quad f(\pi)=2\pi.$$

Al evaluar en $x=0$:

$$f(0)=-0\cdot\cos(0)+2\sin(0)+C_1\cdot 0+C_2=C_2,$$

y la igualdad $f(0)=\frac{\pi}{2}$ implica $C_2=\frac{\pi}{2}$. Al evaluar en $x=\pi$:

$$f(\pi)=-\pi\cos(\pi)+2\sin(\pi)+C_1\,\pi+C_2.$$

Puesto que $\cos(\pi)=-1$ y $\sin(\pi)=0$, se obtiene

$$f(\pi)=\pi+0+\pi C_1+C_2.$$

Dado que $f(\pi) = 2\pi$, se cumple

$$\pi + \pi C_1 + C_2 = 2\pi.$$

Sustituyendo $C_2 = \frac{\pi}{2}$:

$$\pi + \pi C_1 + \frac{\pi}{2} = 2\pi,$$

lo que lleva a

$$\pi C_1 = 2\pi - \pi - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} \quad \Longrightarrow \quad C_1 = \frac{1}{2}.$$

Por tanto, la función que satisface todas las condiciones es

$$\boxed{f(x) = -x\cos(x) + 2\sin(x) + \tfrac{1}{2}\,x + \tfrac{\pi}{2}}$$

Ejercicio 5. Álgebra

Considera la matriz

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

a) **Calcula $\mathbf{A^{2024}}$.**
b) **Halla la matriz $\mathbf{X}$, si es posible, que verifica $\mathbf{A^2XA + I = O}$, donde $\mathbf{I}$ y $\mathbf{O}$ son la matriz identidad y la matriz nula de orden 3, respectivamente.**

Solución:

a) **Calcula $\mathbf{A^{2024}}$.**

Para calcular A^{2024}, se observa que A es la suma de la matriz identidad I y otra matriz

$$M = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

de modo que $A = I + M$. Al comprobar que M^2 es la matriz nula (cada producto fila-columna lleva a 0), se concluye que $(I + M)^n = I + n\,M$ para cualquier entero positivo n. Aplicando este resultado con $n = 2024$, se obtiene

$$A^{2024} = I + 2024\,M.$$

Al multiplicar 2024 por cada entrada de M, resulta:

$$M \cdot 2024 = \begin{pmatrix} 0 & 2024 \cdot \frac{1}{8} & 2024 \cdot \frac{1}{8} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 253 & 253 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Por consiguiente,

$$A^{2024} = I + \begin{pmatrix} 0 & 253 & 253 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 253 & 253 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Por lo tanto, la solución es:

$$\boxed{A^{2024} = \begin{pmatrix} 1 & 253 & 253 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}$$

b) **Halla la matriz $\mathbf{X}$, si es posible, que verifica $\mathbf{A^2XA + I = O}$, donde $\mathbf{I}$ y $\mathbf{O}$ son la matriz identidad y la matriz nula de orden 3, respectivamente.**

Se desea hallar la matriz X, si existe, que satisfaga

$$A^2\,X\,A + I = O.$$

Esta ecuación equivale a

$$A^2\,X\,A = -I.$$

Dado que A es invertible, pues su determinante es no nulo:

$$\det(A) = \det\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1 \neq 0,$$

se puede aislar X multiplicando por las inversas apropiadas. Primero se multiplica por A^{-2} por la izquierda y por A^{-1} por la derecha, obteniéndose

$$X = A^{-2}\,(-I)\,A^{-1} = -\,A^{-2}A^{-1} = -A^{-3}.$$

Para hallar A^{-3}, se tiene en cuenta que la inversa de A coincide con:

$$(I-M)(I+M) = I \quad \Rightarrow \quad A^{-1} = (I+M)^{-1} = I - M,$$

puesto que $M^2 = O$. En efecto,

$$A^{-1} = I - M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{8} & -\frac{1}{8} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Asimismo, $(I-M)^3 = I - 3M$ cuando $M^2 = O$. Así:

$$A^{-3} = (A^{-1})^3 = I - 3\,M = \begin{pmatrix} 1 & -3\frac{1}{8} & -3\frac{1}{8} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{3}{8} & -\frac{3}{8} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

En consecuencia,

$$X = -A^{-3} = -\begin{pmatrix} 1 & -\frac{3}{8} & -\frac{3}{8} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & \frac{3}{8} & \frac{3}{8} \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Por lo tanto, la matriz X que cumple $A^2\,X\,A + I = O$ queda determinada y existe de forma única, con valor

$$\boxed{X = \begin{pmatrix} -1 & \frac{3}{8} & \frac{3}{8} \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}}$$

Ejercicio 6. Álgebra

Considera el sistema

$$\begin{cases} y+z=1, \\ (k-1)x+y+z=k, \\ x+(k-1)y+z=0. \end{cases}$$

a) **Discute el sistema según los valores de k**.
b) **Para $\mathbf{k=1}$ resuelve el sistema, si es posible. ¿Hay alguna solución en la que $\mathbf{y=0}$? En caso afirmativo, calcúlala. En caso negativo, justifica la respuesta**.

Solución:

a) **Discute el sistema según los valores de k**.

Las ecuaciones del sistema pueden escribirse en forma matricial como

$$A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ k \\ 0 \end{pmatrix},$$

donde la matriz de coeficientes A y la matriz ampliada A^* son

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ k-1 & 1 & 1 \\ 1 & k-1 & 1 \end{pmatrix}, \quad A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 1 \\ k-1 & 1 & 1 & k \\ 1 & k-1 & 1 & 0 \end{array}\right).$$

Para aplicar el Teorema de Rouché-Frobenius, primero calculamos $\det(A)$ y lo igualamos a cero, analizando así el posible valor del rango. Se calcula el determinante de A mediante expansión por la primera fila (también se puede emplear la Regla de Sarrus):

$$\det(A) = 0 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ k-1 & 1 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} k-1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} k-1 & 1 \\ 1 & k-1 \end{vmatrix}.$$

El primer término no aporta nada, pues va multiplicado por cero. Para el segundo determinante:

$$\begin{vmatrix} k-1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = (k-1)\cdot 1 - 1\cdot 1 = k-2.$$

Se multiplica por -1, quedando $-(k-2) = 2-k$. El tercer determinante es

$$\begin{vmatrix} k-1 & 1 \\ 1 & k-1 \end{vmatrix} = (k-1)(k-1) - 1\cdot 1 = (k-1)^2 - 1 = k^2 - 2k + 1 - 1 = k^2 - 2k.$$

Sumando todo,

$$\det(A) = (2-k) + (k^2-2k) = k^2 - 3k + 2 = (k-1)(k-2).$$

Así,

$$\det(A) = 0 \quad \Rightarrow \quad (k-1)(k-2) = 0 \quad \Rightarrow \quad k=1 \quad \text{o} \quad k=2.$$

Discutimos del sistema según los valores de k *(Teorema de Rouché-Frobenius).*

- Caso 1: $k \neq 1, 2$.
  En este caso, $\det(A) \neq 0$, lo cual implica que $\text{rango}(A) = 3$. Como A^* es una matriz 3×4 que contiene a la matriz A, ello conlleva que $\text{rango}(A^*) = 3$, por lo que el sistema admite una *única* solución (sistema compatible determinado).

– Caso 2: $k = 2$.
De nuevo, $\det(A) = 0$. Se analiza si el sistema es compatible o no, según cómo queden las ecuaciones y el rango de la matriz ampliada. En este caso:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right).$$

En este caso, vemos que las ecuaciones del sistema son:

$$\begin{cases} y + z = 1, \\ x + y + z = 2, \\ x + y + z = 0. \end{cases}$$

Vemos que la segunda ecuación y la tercera no se pueden satisfacer simultáneamente, pues $2 \neq 0$, por lo que en este caso no hay solución y el sistema es incompatible.

– Caso 3: $k = 1$.
Entonces $\det(A) = 0$, por lo que $\text{rango}(A) < 3$. Puede ocurrir que el sistema sea compatible con infinitas soluciones o bien que no tenga soluciones, dependiendo del rango de A^* y de A. Hay que estudiar este caso de forma separada. Cuando $k = 1$, la matriz de coeficientes pasa a

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right).$$

Las ecuaciones del sistema se pueden reescribir como:

$$\begin{cases} y + z = 1, \\ 0 \cdot x + y + z = 1, \\ x + 0 \cdot y + z = 0. \end{cases}$$

Observamos que las dos primeras ecuaciones son en realidad la misma: $y + z = 1$. Esto revela que hay, potencialmente, dependencia entre las filas de A y el sistema puede ser compatible con infinitas soluciones o no tener solución, dependiendo de la coherencia de la tercera ecuación con las dos primeras. Para calcular el rango de A, nos damos cuenta de que la tercera fila (1, 0, 1) no es combinación lineal de la segunda (0, 1, 1) ni de la primera (0, 1, 1); en cambio, la primera y la segunda son la misma. Entonces,

$$\text{rango}(A) = 2.$$

Observando la matriz ampliada

$$A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right),$$

se comprueba que la primera fila es igual a la segunda fila, por lo que no introducen contradicción. La tercera fila no es combinación lineal de la primera ni de la segunda, pero no genera inconsistencias en la columna ampliada. Por ende, también se obtiene

$$\text{rango}(A^*) = 2.$$

Puesto que $\text{rango}(A) = \text{rango}(A^*) = 2 < 3 =$ número de incógnitas, el sistema es compatible con infinitas soluciones (un sistema de 3 incógnitas con rango 2, sistema compatible indeterminado).

Por lo tanto, la solución es:

$$\boxed{\begin{array}{lcl} k \neq 1, 2 & \Rightarrow & \text{Sistema Compatible Determinado (existe una única solución),} \\ k = 1 & \Rightarrow & \text{Sistema Compatible Indeterminado (existen infinitas soluciones),} \\ k = 2 & \Rightarrow & \text{Sistema Incompatible (no existe solución).} \end{array}}$$

b) **Para $\mathbf{k = 1}$ resuelve el sistema, si es posible. ¿Hay alguna solución en la que $\mathbf{y = 0}$? En caso afirmativo, calcúlala. En caso negativo, justifica la respuesta**.

Para $k = 1$, las ecuaciones del sistema se pueden reescribir como:

$$\begin{cases} y + z = 1, \\ y + z = 1, \\ x + z = 0. \end{cases}$$

Las dos primeras ecuaciones coinciden y dicen $y + z = 1$. La tercera ecuación dice $x + z = 0$. De este modo se despeja:

$$z = 1 - y \quad \text{y} \quad x = -z = -(1 - y) = y - 1.$$

Por tanto,

$$(x,\ y,\ z) = \big(y - 1,\ y,\ 1 - y\big).$$

Cualquier valor real de y genera una solución, y el conjunto de soluciones es

$$\{\,(\,y - 1,\ y,\ 1 - y)\ |\ y \in \mathbb{R}\}.$$

Para encontrar una solución con $y = 0$ se exige dicha condición, de las expresiones anteriores se obtiene

$$x = 0 - 1 = -1, \quad z = 1 - 0 = 1.$$

Se comprueba fácilmente que $(-1, 0, 1)$ satisface las ecuaciones cuando $k = 1$. Por tanto, *sí* existe una solución con $y = 0$, y es

$$\boxed{(-1,\ 0,\ 1)}$$

Por lo tanto, la solución del sistema cuando $\mathbf{k = 1}$ es:

$$\boxed{\{\,(\,y - 1,\ y,\ 1 - y)\ |\ y \in \mathbb{R}\}}$$

Ejercicio 7. Geometría

a) **Halla el punto simétrico de $\mathbf{P(2,2,1)}$ respecto de la recta $\mathbf{r} \equiv \begin{cases} x-2y+z &= 2, \\ y-z &= 1. \end{cases}$**

b) **Halla el punto simétrico de $\mathbf{Q(1,-1,-3)}$ respecto del plano $\pi \equiv \mathbf{x-2y+z+6=0}$.**

Solución:

a) **Halla el punto simétrico de $\mathbf{P(2,2,1)}$ respecto de la recta $\mathbf{r} \equiv \begin{cases} x-2y+z &= 2, \\ y-z &= 1. \end{cases}$**

La recta r se halla en la intersección de los planos

$$r \equiv \begin{cases} x-2y+z &= 2, \\ y-z &= 1. \end{cases}$$

Se puede describir en forma paramétrica resolviendo de manera simultánea. De la segunda ecuación $y-z=1$ se obtiene $z=y-1$. Sustituyendo en la primera,

$$x-2y+(y-1)=2 \quad \Longrightarrow \quad x-y-1=2 \quad \Longrightarrow \quad x-y=3 \quad \Longrightarrow \quad x=3+y.$$

Tomando y como parámetro t, resulta $x=3+t$ y $z=t-1$. De este modo, la recta se describe como

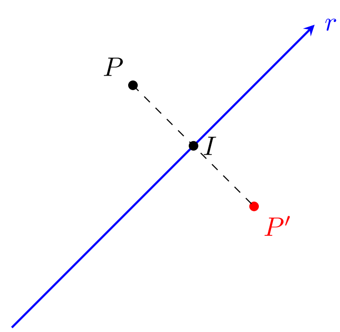
$$r \equiv \begin{cases} x &= t+3 \\ y &= t \\ z &= t-1 \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

También puede usarse la forma vectorial:

$$r: \quad \big(x,y,z\big) = \big(3,\,0,\,-1\big) + t\,\big(1,\,1,\,1\big).$$

Sea $P=(2,2,1)$. Para hallar el simétrico de P respecto de r, se procede del modo siguiente:

- Se encuentra el punto I de la recta r que es intersección con la perpendicular desde P. Esto se logra imponiendo que el vector $\overrightarrow{PI}$ sea ortogonal a la dirección de r, que es $(1,\,1,\,1)$.
- Si I es tal punto de intersección, el simétrico P' de P respecto de r es aquel para el cual I es el punto medio del segmento PP'. Es decir, $P'=2I-P$.



Considerando la forma vectorial:

$$I = (3,\,0,\,-1) + t\,(1,\,1,\,1),$$

el vector $\overrightarrow{PI} = I-P$ ha de ser ortogonal a $(1,1,1)$. De aquí se obtiene la ecuación

$$\big[(3-2)+t,\,(0-2)+t,\,(-1-1)+t\big]\cdot(1,1,1)=0.$$

Es decir,

$$(1+t)+(-2+t)+(-2+t)=0,$$

cuya suma lleva a $1+t-2+t-2+t=-3+3t=0$, de donde $t=1$. Sustituyendo $t=1$ en la recta, se halla

$$I=(3,0,-1)+(1,1,1)=(4,\ 1,\ 0).$$

El punto simétrico P' es tal que I sea el punto medio de PP', de modo que

$$P'=2\,I-P=2\,(4,\ 1,\ 0)\ -\ (2,\ 2,\ 1).$$

Con la operación componente a componente,

$$P'=(8-2,\ 2-2,\ 0-1)=(6,\ 0,\ -1).$$

Por tanto, el punto simétrico de $\mathbf{P(2,2,1)}$ respecto de la recta r es:

$$\boxed{(6,\ 0,\ -1)}$$

b) Halla el punto simétrico de $\mathbf{Q(1,-1,-3)}$ respecto del plano $\pi\equiv\mathbf{x-2y+z+6=0}$.

Sea el plano

$$\pi:\quad x-2y+z+6=0.$$

La ecuación normal del plano es $(1,-2,1)\cdot(x,y,z)+6=0$, de modo que su vector normal es $\vec{n}=(1,-2,1)$. Para reflejar un punto $Q=(1,-1,-3)$ respecto de π, se utiliza la fórmula habitual de reflexión, que puede resumirse así:

$$Q'=Q\ -\ 2\,\frac{Ax_0+By_0+Cz_0+D}{A^2+B^2+C^2}\,\big(A,\ B,\ C\big),$$

donde el plano es $A\,x+B\,y+C\,z+D=0$, y (x_0,y_0,z_0) son las coordenadas del punto que se refleja. En este problema, $(A,B,C)=(1,-2,1)$ y $D=6$. Entonces:

$$Ax_0+By_0+Cz_0+D=1\cdot 1+(-2)\cdot(-1)+1\cdot(-3)+6=1+2-3+6=6.$$

El cuadrado de la norma de n es $1^2+(-2)^2+1^2=1+4+1=6$. Por tanto, la reflexión es

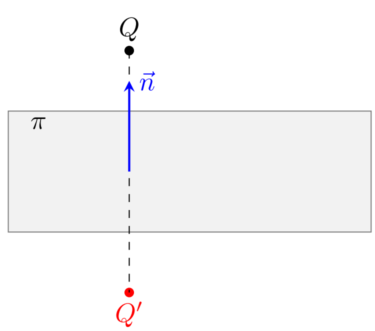
$$Q'=Q-2\,\frac{6}{6}\,(1,\ -2,\ 1)=Q-2\,(1,\ -2,\ 1).$$

Dado $Q=(1,-1,-3)$, se realiza la resta:

$$Q'=\big(1,\ -1,\ -3\big)\ -\ 2\,(1,\ -2,\ 1)=\big(1-2,\ -1-(-4),\ -3-2\big).$$

Componente a componente:

$$Q'=(-1,\ 3,\ -5).$$



Por tanto, el punto simétrico de $\mathbf{Q(1,-1,-3)}$ respecto del plano π es:

$$\boxed{(-1,\ 3,\ -5)}$$

Ejercicio 8. Geometría

Considera las rectas $\mathbf{r} \equiv \begin{cases} y & = 0, \\ 2x - z & = 0, \end{cases}$ y $\mathbf{s} \equiv \begin{cases} x + y + 7 & = 0, \\ z & = 0. \end{cases}$

a) **Estudia la posición relativa de r y s**.
b) **Calcula la ecuación del plano paralelo a r y s que equidista de ambas rectas**.

Solución:

a) **Estudia la posición relativa de r y s**.

Recta r: Para r se tienen las ecuaciones

$$y = 0, \quad 2x - z = 0 \quad \Rightarrow \quad z = 2x.$$

Tomando $x = t$ como parámetro,

$$r : (x, y, z) = (t,\ 0,\ 2t).$$

Un punto sobre r es, por ejemplo, $R_0 = (0,\ 0,\ 0)$ (cuando $t = 0$), y su vector director es $\overrightarrow{d_r} = (1,\ 0,\ 2)$.

Recta s: Se da por

$$x + y + 7 = 0, \quad z = 0.$$

Al tomar $x = \tau$ como parámetro, entonces $y = -\tau - 7$, y $z = 0$. Por tanto,

$$s : (x, y, z) = (\tau,\ -\tau - 7,\ 0).$$

Un punto sobre s es, por ejemplo, $S_0 = (0,\ -7,\ 0)$ (cuando $\tau = 0$), y su vector director es $\overrightarrow{d_s} = (1,\ -1,\ 0)$.

Comparación de vectores directores: $(1,\ 0,\ 2)$ y $(1,\ -1,\ 0)$ no son proporcionales, por lo que r y s no son paralelas.

Búsqueda de intersección: Para un posible punto común, se igualan las parametrizaciones:

$$(t,\ 0,\ 2t) \ = \ (\tau,\ -\tau - 7,\ 0).$$

Ello supondría $t = \tau$, $0 = -\tau - 7$ y $2t = 0$. De $2t = 0$ se sigue $t = 0$, y así $\tau = 0$. Pero entonces $0 = -0 - 7$ impone $0 = -7$, lo cual es absurdo. No hay solución y, por tanto, r y s no se cortan.

Comprobación de coplanaridad: Se analiza si hay un solo plano que contenga ambas rectas. Se toma el vector entre un punto de r y un punto de s, por ejemplo,

$$\overrightarrow{R_0S_0} = (0 - 0,\ -7 - 0,\ 0 - 0) = (0,\ -7,\ 0).$$

Si los tres vectores

$$\overrightarrow{d_r} = (1,\ 0,\ 2), \quad \overrightarrow{d_s} = (1,\ -1,\ 0), \quad \overrightarrow{R_0S_0} = (0,\ -7,\ 0)$$

fueran coplanarios, el determinante de la matriz que forman daría cero. Se construye la matriz con estos vectores como filas:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & -7 & 0 \end{pmatrix}.$$

Calculamos su determinante:

$$\det(M) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & -7 & 0 \end{vmatrix}.$$

Desarrollamos por la primera fila:

$$\det(M) = 1 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ -7 & 0 \end{vmatrix} - 0 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} + 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -7 \end{vmatrix}.$$

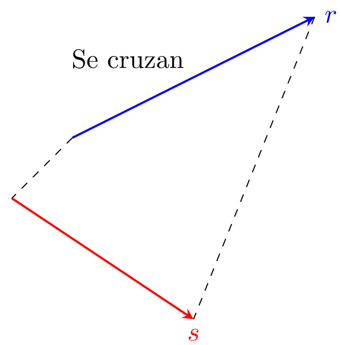
Calculamos los determinantes menores:

$$\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ -7 & 0 \end{vmatrix} = (-1)(0) - (0)(-7) = 0, \quad \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -7 \end{vmatrix} = (1)(-7) - (-1)(0) = -7.$$

Sustituyendo:

$$\det(M) = 1(0) + 2(-7) = -14 \neq 0.$$

Dado que el determinante es distinto de cero, los tres vectores no son coplanarios, lo que implica que las rectas r y s no están contenidas en un mismo plano y, por ende, son rectas que se cruzan.



Por lo tanto, las rectas r y s no están contenidas en un mismo plano y, por ende, son rectas que se cruzan.

b) Calcula la ecuación del plano paralelo a r y s que equidista de ambas rectas.

Un plano es paralelo a una recta si su vector normal es ortogonal al vector director de la recta. Aquí, el vector normal $\vec{n}$ del plano buscado debe ser ortogonal a $\overrightarrow{d_r} = (1,\, 0,\, 2)$ y también a $\overrightarrow{d_s} = (1,\, -1,\, 0)$. Entonces,

$$\vec{n} = \overrightarrow{d_r} \times \overrightarrow{d_s} = (1,\, 0,\, 2) \times (1,\, -1,\, 0) = (2,\, 2,\, -1).$$

Cualquier plano con normal $(2, 2, -1)$ puede escribirse como

$$2x + 2y - z + d = 0,$$

con d real. Queremos que dicho plano esté *a la misma distancia* de ambas rectas. Para la distancia de una línea a un plano, si la línea es paralela al plano, basta con medir la distancia entre el plano y cualquier punto de la recta. Así:

– En r, tomamos $R_0 = (0, 0, 0)$. Su distancia al plano $2x + 2y - z + d = 0$ es

$$d(r,\ \text{plano}) = \frac{|\, 2 \cdot 0 + 2 \cdot 0 - 0 + d\,|}{\sqrt{2^2 + 2^2 + (-1)^2}} = \frac{|\, d\,|}{\sqrt{4+4+1}} = \frac{|\, d\,|}{3}.$$

– En s, tomamos $S_0 = (0, -7, 0)$. La distancia al mismo plano es

$$d(s,\ \text{plano}) = \frac{|\, 2 \cdot 0 + 2 \cdot (-7) - 0 + d\,|}{3} = \frac{|\, -14 + d\,|}{3}.$$

Para que el plano equidiste de las dos rectas, necesitamos

$$\frac{|\,d\,|}{3} = \frac{|\,-14+d\,|}{3} \quad \Longrightarrow \quad |\,d\,| = |\,-14+d\,|.$$

La solución que funciona (sin caer en contradicción) es $d = 7$:

$$d = 7 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} |\,7\,| = 7, \\ |\,-14+7\,| = |\,-7\,| = 7, \end{cases}$$

así se cumple la igualdad. El plano buscado es

$$2x + 2y - z + 7 = 0.$$

Su distancia a ambos ejes directores de las rectas es $7/3$.

Por lo tanto, el plano paralelo a r y s que equidista de ambas rectas es:

$$\boxed{2x \;+\; 2y \;-\; z \;+\; 7 \;=\; 0}$$